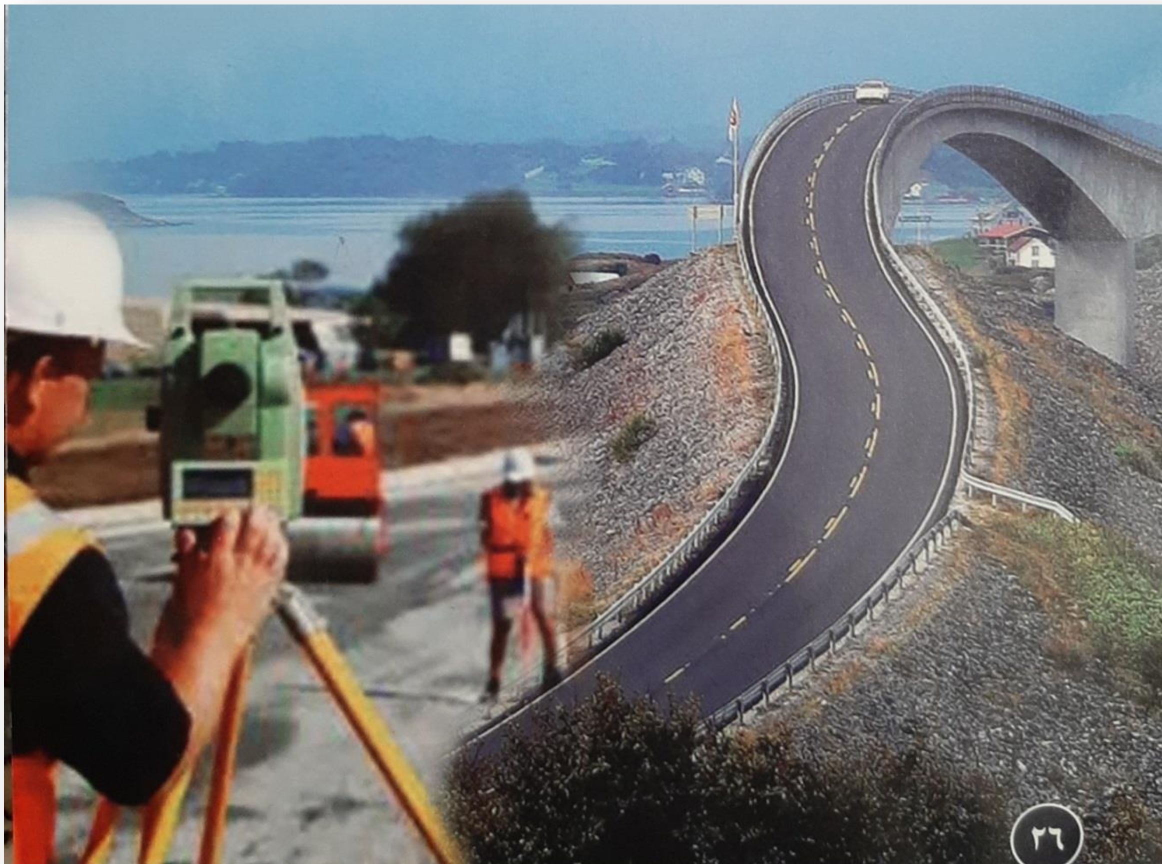
نقشه برداری مهندسی



دکتر صالح عبدالهی

دانشگاه آزاد اسلامی اصفهان

فهرست مطالب

3) نظریه خطاها

- مقدمه
- عوامل خطا
- اشتباه
- انواع خطا
- محاسبه خطاها

نظریه خطاها

- مقدمه :

- نقشه برداری مجموعه ای از اندازه گیریها و محاسبات روی آنهاست که منجر به تهیه نقشه میشود.
- این اندازه گیریها به سه دسته تقسیم میشوند:
  - اندازه گیری طول(طولیابی)
  - اندازه گیری ارتفاع (ترازیابی)
  - اندازه گیری زاویه (زاویه یابی)
- آشنایی و بررسی خطاها کمک میکند که:
  1. اولا در هر عمل اندازه گیری به دقت مطلوب در عملیات دستیابی حاصل کنیم
  2. ثانیا از بکار بردن وسایل گرانقیمت و صرف وقت و هزینه بیهوده جلوگیری کنیم.
- بعبارت دیگر میتوانیم روشهایی را بکار بریم که با حداقل کار و هزینه به دقتی دست بیابیم که برای اندازه گیری خاص مورد نیاز است.

نظریه خطاها

- مقدمه :

- چون پایه اندازه گیری ها حواس انسانی است و ساختمان ابزارهای اندازه گیری نیز به علت دقت محدود انسان کامل نیست، اندازه گیری های انجام شده به اندازه واقعی خود نمی رسد.

- در واقع خطا میزان تفاوت بین مقدار حقیقی و مقدار اندازه گیری شده می باشد که با e نشان داده می شود.

  - a مقدار واقعی
  - a‘ مقدار اندازه گیری شده

$$a - a' = e$$

نظریه خطاها

- ***عوامل خطا:***

منابع عمده اختلاف بین مقدار واقعی و مقدار اندازه گیری شده عبارتند از:

- ✓ عوامل انسانی شامل نارسایی حواس- عدم تجربه و تسلط در کار
- ✓ عوامل دستگاهی شامل نقص دستگاهها، تنظیم نبودن و پایین بودن ارزش تقسیمات آنها
- ✓ عومل جوی مثل باد ، تشعشع و تغییرات دما و اثر شکست نور
- ✓ روش کار

درست نبودن یک اندازه گیری ممکن است نتیجه یکی از علل زیر باشد:

1. اشتباه
2. خطای تدریجی (سیستماتیک)
3. خطای تصادفی (اتفاقی)

نظریه خطاها

عوامل خطا:

- اشتباه با خطا متفاوت می باشد.

اشتباه در اثر عدم دقت عامل یا نقص مشخص ابزار صورت می گیرد که در نقشه برداری مجاز نمی باشد.

در نتیجه جهت جلوگیری از اشتباه باید عمل کنترل انجام گیرد:

- مستقیم : عمل دوباره تکرار شود ولی بهتر است با روش اندازه گیری متفاوت
- غیرمستقیم : عمل از طرق دیگر مانند محاسبه و یا اندازه گیری اجزای دیگر انجام شود (انجام عملیات بصورت رفت و برگشتی)

به عبارت دیگر: کلیه اندازه گیری ها و محاسبات در نقشه برداری (به سبب وجود عیب در ساختار وسایل و ابزار و همچنین حواس انسان که می تواند دچار اشتباه شود)، با واقعیت دقیقا یکسان نمی باشد و اختلاف دارد.

اگر این اختلاف از مقدار مشخص تجاوز نکند آن را خطا و در غیر اینصورت اشتباه می گویند.

در محاسبات و عمل می توان خطا را تصحیح نمود ولی در صورت بروز اشتباه عملیات باید تکرار شود.

نظریه خطاها

1- اشتباه Mistakr Blunder

انحرافی است که در نتیجه بی توجهی،بی دقتی ، فراموشی ، بی تجربگی و ... حاصل می شود.

اشتباهات در اندازه گیری باید حتما حذف شوند.

روشهاي تخصيص اشتباهات

1- تکرار اندازه گیریها

2- کنترل جوابها و انجام عملیات به گونه ای که کنترل ان ممکن باشد

3- انجام عملیات بصورت رفت و برگشتی

نظریه خطاها

2) خطای سیستماتیک:

- خطاهایی که بر اساس روندهای قطعی و تا حد امکان شناخته شده اتفاق افتاده و با مدلها و روابط ریاضی بیان شدنی باشند.

- برای مثال دربارهٔ تغییر طول یک متر نواری فولادی با ضریب انبساط طولی مشخص، یک رابطهٔ تابعی بین دما و تغییر طول نوار به صورت خطی ارائه شده است.

- بنابراین اگر طول متر نواری در دمای استاندارد معلوم باشد، تغییر طول نوار از حالت استاندارد، به دلیل انحراف از دمای استاندارد، به عنوان خطای سیستماتیک شناخته میشود.

- ماهیت خطاهای سیستماتیک به گونه ای است که چنانچه اندازه گیری ها تحت شرایطی کاملاً یکسان تکرار شوند، خطاهای سیستماتیک نیز عیناً تکرار میگردند و آشکار نمی شوند.

نظریه خطاها

2) خطای سیستماتیک:

- در نقشه برداری خطای خطرناکی محسوب می شود، چون جمع شونده بوده و جهت همه خطاها یکی می باشد و معمولا در اثر بهم خوردن تنظیمات ابزار تولید می شود.

- بطور مثال اگر طول یک متر برابر با L تولید شده باشد، ولی در طول زمان و به دلیل عوامل مختلف برابر L′ شود. در نتیجه در هر اندازه گیری به اندازه L-L′ تغییر طول خواهیم داشت. هر چه تعداد دفعات اندازه گیری بیشتر شود میزان خطا به نسبت افزایش میابد.

- در نتیجه جهت جلوگیری از این خطا، در موسسات نقشه برداری ابزار ها را چند وقت یکبار بررسی و کنترل می نمایند.

نظریه خطاها

2- خطاهاي سيستماتيك Systematic Error

خطاهائی است که بر اساس یک سیستم و قاعده مشخص اتفاق می افتد و برای تخمین و شناسائی این خطاها باید سیستم و قاعده مذکور را بشناسیم، مثل خطاهای غیر استاندارد بودن مترها

عواملي كه باعث خطاهاي سيستماتيك مي شوند:

1- اشتباهات دستگاهها و وسائل

2- شرایط محیطی:دما،شکست نور، انحنائ زمین ، وزش باد و ...

نظریه خطاها

3) خطای اتفاقی:

- اگر خطاهای سیستماتیک و اشتباهات کاملا برطرف یا تصحیح شوند باز هم خطایی در اندازه گیری وجود دارد، که قابل پیش بینی نیستند و نمی توان آن ها را محاسبه و تصحیح نمود.
- این خطا برخلاف تدریجی جهت مشخصی نداشته و ممکن است در عمل مجموع خطاهای اتفاقی چند اندازه گیری برابر صفر یا مقدار زیادی باشد.
- در تئوری خطاها اصل براین است که اگر کمیتی n بار اندازه گیری شود، مجموع جبری خطاهای اتفاقی در حالتی که مقدار n زیاد باشد برابر صفر می گردد.

نظریه خطاها

3- خطاهاي اتفاقي : Random Errors

اگر خطاهای سیستماتیک و اشتباهات کاملا حذف شوند ویا تصحیح شوند بازهم خطائی در اندازه گیریها وجود دارند که به ان خطاهای اتفاقی می گویند.

علت اصلی این خطاها این است که:

1- قابل پیش بینی نیستند

2- نمی توان آنها را محاسبه کرد

3- نمی توان آنها را تصحیح کرد

نظریه خطاها

❖ ***بنابراین :***

- خطاهای سیستماتیک همگی در یک جهت هستند و با هم جمع میشوند.
- برای جلوگیری از خطاهای سیستماتیک باید عامل خطا را از میان برداشت و یا میزان خطا را در اندازه گیری تعیین و در نتیجه در اندازه گیری دخالت دهیم.
- به خاطر ماهیت اتفاقی بودن خطاهای تصادفی برای بررسی اثرات آنها بر روی نتیجه اندازه گیریها از قواعد آمار و احتمالات و مخصوصا توزیع نرمال استفاده میشود.

نظریه خطاها

- ***تفاوت خطا و اشتباه:***

- **اشتباهات معمولا بزرگ بوده و در اکثر موارد میتوان آنرا ردیابی نمود.**
- **اشتباه را میتوان تصحیح یا حذف نمود و یا با کنترل اندازه گیری از وقوع مجدد آن جلوگیری کرد.**

<u>در مقابل؛</u>

- **خطاها مقدارشان کوچک بوده وگاهی اوقات به هیچ وجه قابل کنترل و تصحیح نیستند.**
- **ولی با استفاده از تئوری خطاها و آشنایی با قوانین آن میتوان با انتخاب روش مناسب، تکرار اندازه گیری و یا با دقت به مفهوم اشتباه و استفاده از تعاریف ریاضی مقدار خطای قابل قبول را از اندازه گیری و جدا نمود.**

نظریه خطاها

- ***منحنی نمایش خطاهای اتفاقی (منحنی زنگوله ای گوس):***

- **به دلیل ماهیت تصادفی بودن خطاهای اتفاقی برای بررسی اثرات آن ها بر روی نتایج اندازه گیری ها، از قواعد آمار و احتمالات و مخصوصا توزیع نرمال استفاده می شود.**

- **که این قواعد نتایج زیر را برای یک اندازه گیری بدون خطای سیستماتیک که به دفعات تکرار می شود را به دنبال دارد:**

1. **در مقابل هر خطای مثبت یک خطای منفی وجود دارد که قدر مطلقشان با هم برابر است.**
2. **خطاهای کوچک بدفعات بیشتری اتفاق میافتنند.**
3. **بزرگی خطاها از یک حد معینی تجاوز نمی کند، بنابراین می توان اشتباه در اندازه گیری را تشخیص داد.**
4. **بزرگی باقیمانده با تعداد باقیمانده نسبت عکس دارد، بنابراین منحنی نزولی می باشد.**

نظریه خطاها

منحنی نمایش خطاهای اتفاقی (منحنی زنگوله ای گوس):

نحوه توزیع خطاهای تصادفی را میتوان بوسیله یک فرمول و یا یک منحنی تعیین کرد که آنرا تابع توزیع خطا و یا منحنی توزیع نرمال میگویند.

$$y = k * e^{-h^2 x^2}$$

که در این معادله :

- **y : احتمال نسبی اتفاق افتادن یا وقوع یک خطا در اندازه گیری معینی می باشد (نسبت درصد وقوع خطا)**
- **X : مقدار خطاست**
- **e : پایه لگاریتم طبیعی : عدد نپر (۲.۷۱۸۲۸۰۰) می باشد.**
- **h و k : ضرایب ثابت منحنی گوس می باشد که برای مشخص کردن شکل ظاهری منحنی است و مقدار آن ها از روی اندازه گیری و وزن های مربوطه و احتمالات حاصل می شود که نتیجه آن عبارت است از:**

نظریه خطاها

منحنی نمایش خطاهای اتفاقی (منحنی زنگوله ای گوس):

$$h = \frac{1}{\delta\sqrt{2}}$$

$$k = \frac{h}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}$$

- با توجه به خواص توزیع نرمال و منحنی گوس نتایج زیر در خصوص خطاهای اتفاقی بدست می آید:

۱- به ازای هر خطای مثبت یک خطای منفی وجود دارد که از نظر قدر مطلق با هم برابرند.

۲- خطاهای کوچک بدفعات بیشتری رخ میدهند.

۳- عملا خطاها بین دو مقدار a− و a+ توزیع شده اند. این دو مقدار حد خطای مجاز را تعیین میکنند قدر مطلق a را خطای ماکزیمم مینامند.

۴- در نظریه خطاها ثابت میکنند که خطای ماکزیمم حدودا 2.5 برابر خطای معیار است و احتمال آنکه خطایی بیش از این مقدار باشد 1/100 است.

نظریه خطاها

منحنی نمایش خطاهای اتفاقی (منحنی زنگوله ای گوس):

مثال ۱. این مثال مربوط به احتمال وقوع و تعمیم آن در بررسی منحنی زنگوله ای گوس می باشد.

دو تاس را در نظر بگیرید، هر یک از این تاس ها دارای شش حالت هستند. اگر هریک از این تاس ها را بریزید، شش حالت مختلف ممکن است پیش بیاید که احتمال وقوع هریک از این شش حالت با هم مساوی و برابر ۱/۶ است.

حال اگر دو تاس را با هم ریخته شود ۳۶ حالت مختلف ایجاد می شود که احتمال وقوع هر یک از این ۳۶ حالت با هم مساوی است، اما حالت هایی که مجموع ۲ و ۱۲ را می سازد با حالتی که ۷ رقم را می سازد یکی نیست.

نظریه خطاها

منحنی نمایش خطاهای اتفاقی (منحنی زنگوله ای گوس):

مثال ۱. محور عمودی: تعداد حالات وقوع

محور افقی : مجموع شماره های دو تاس

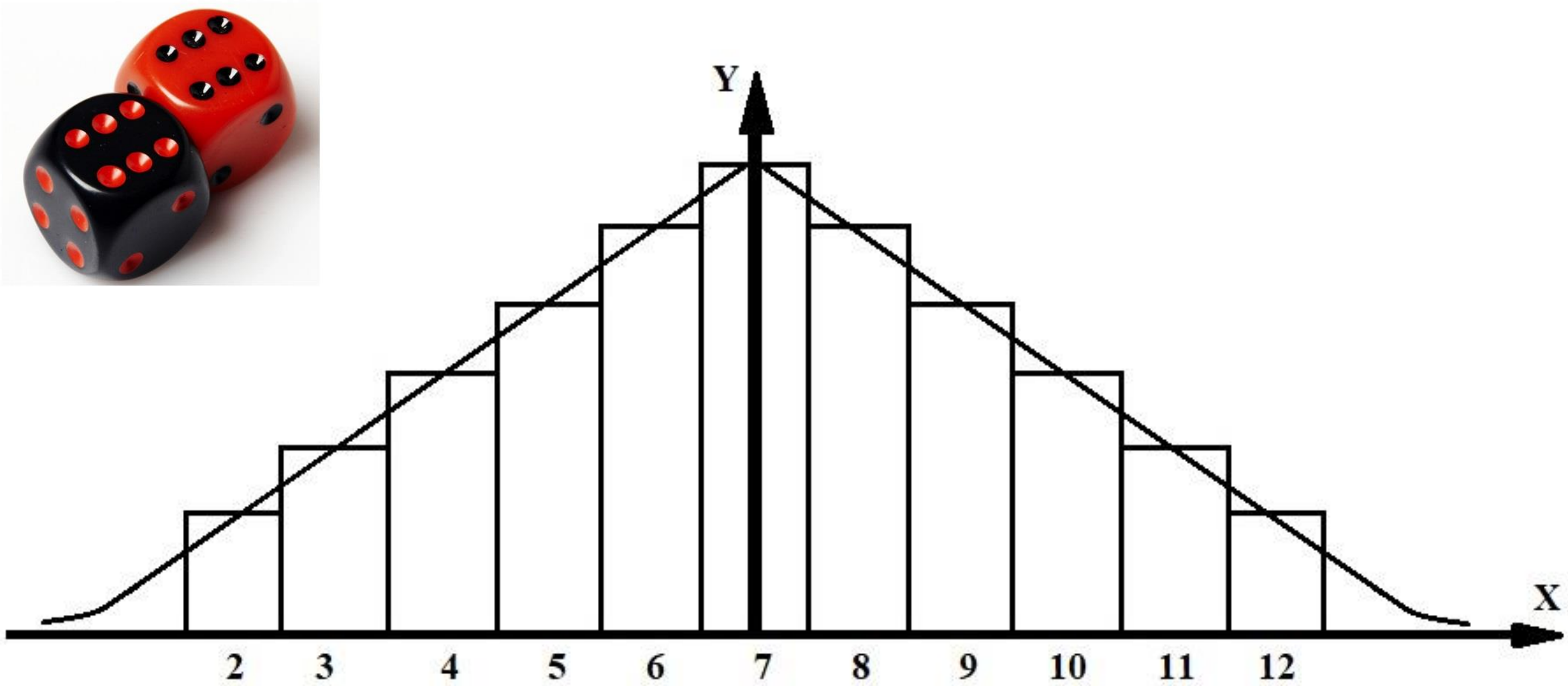
تعداد حالت های هر رقم، احتمال وقوع آن را نشان می دهد.

6	-----	-----	-----	-----	-----	6,1	-----	-----	-----	-----	-----
5	-----	-----	-----	-----	5,1	5,2	6,2	-----	-----	-----	-----
4	-----	-----	-----	4,1	4,2	4,3	5,3	6,3	-----	-----	-----
3	-----	-----	3,1	3,2	3,3	3,4	4,4	5,4	6,4	-----	-----
2	-----	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	-----
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

نظریه خطاها

منحنی نمایش خطاهای اتفاقی (منحنی زنگوله ای گوس):

مثال ۱. حال اگر برای هریک از حالت ها مستطیلی با عرض واحد و طول متناسب با احتمال وقوع آن در نظر گرفته وسط عرض این مستطیل را بهم متصل کنیم یک منحنی زنگوله ای حاصل می شود که به منحنی احتمالات و یا منحنی زنگوله ای گوس معروف است.

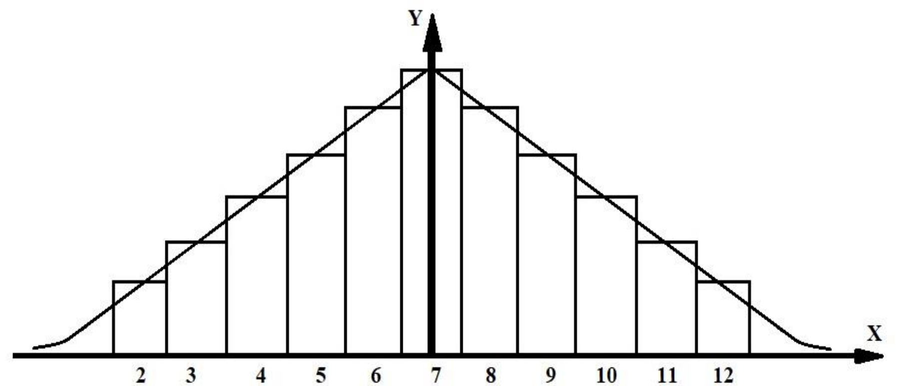


نظریه خطاها

منحنی نمایش خطاهای اتفاقی (منحنی زنگوله ای گوس):

مثال ۱. از شکل می توان دریافت که احتمال وقوع اعداد به قرار زیر است :

$$P(2) = \frac{1}{36}\ , P(3) = \frac{2}{36}\ ,\ P(4) = \frac{3}{36}\ , \ldots\ ,\ P(7) = \frac{6}{36}$$



6	-----	-----	-----	-----	-----	6,1	-----	-			
5	-----	-----	-----	-----	5,1	5,2	6,2	-			
4	-----	-----	-----	4,1	4,2	4,3	5,3	6,3	-----	-----	-----
3	-----	-----	3,1	3,2	3,3	3,4	4,4	5,4	6,4	-----	-----
2	-----	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	-----
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

نظریه خطاها

منحنی نمایش خطاهای اتفاقی (منحنی زنگوله ای گوس):

مثال ۲. در یک شبکه مثلث بندی زوایای ۴۸۴ مثلث اندازه گیری شده است.

مقدار زوایای حاصل برای هر مثلث به جای ۱۸۰ درجه به قرار جدول زیر می باشد.

تعداد مثلث ها	مجموع زوایای هر مثلث	مقدار خطای اندازه گیری
105	179º, 59′, 55″	+5″
103	180, 00, 05	-5
84	179, 59, 50	+10
86	180, 00, 10	-10
40	179, 59, 45	+15
34	180, 00, 15	-15
9	179, 59, 40	+20
13	180, 00, 20	-20
3	179, 59, 35	+25
3	180, 00, 25	-25
2	179, 59, 30	+30
2	180, 00, 30	-30

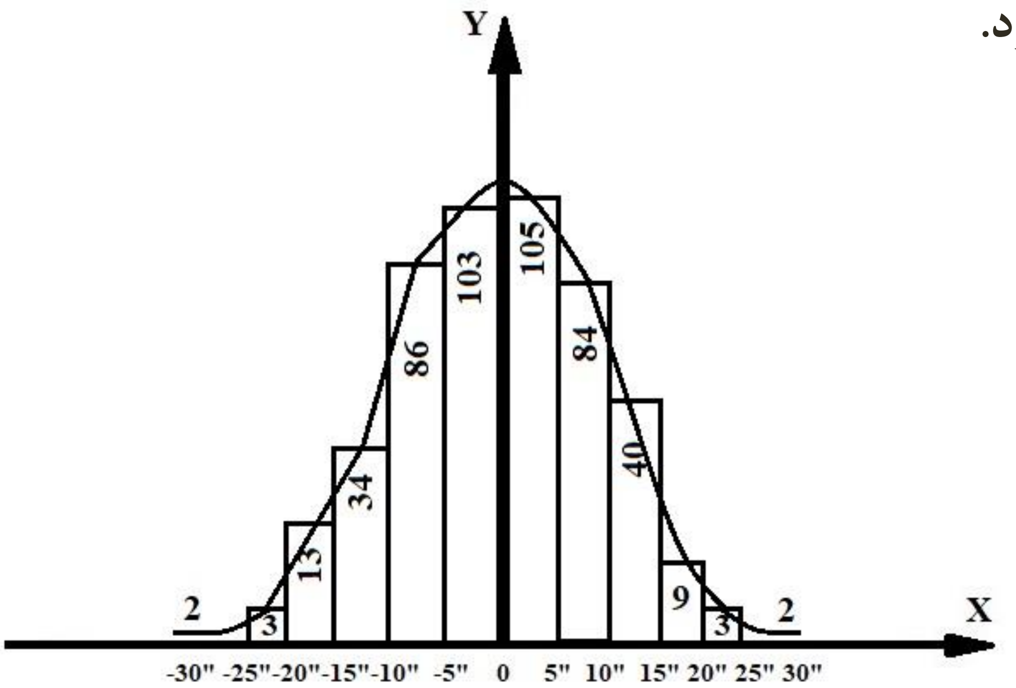
نظریه خطاها

منحنی نمایش خطاهای اتفاقی (منحنی زنگوله ای گوس):

مثال ۲. برای اینکه توزیع خطاها را نشان دهیم آنرا روی محورهای x و yمنتقل می کنیم.

(یعنی مقدار خطا را که از مثبت ۳۰ تا منفی ۳۰ درجه است روی محور xها و تعداد مثلث ها را روی محور yها منتقل می کنیم.)

بدین طریق مستطیل هایی حاصل می شود که اگر وسط عرض های آن ها را بهم وصل کنیم، منحنی زنگوله ای گوس حاصل می شود.



نظریه خطاها

منحنی نمایش خطاهای اتفاقی (منحنی زنگوله ای گوس):

باتوجه به مثال های فوق می توان نتیجه گرفت که:

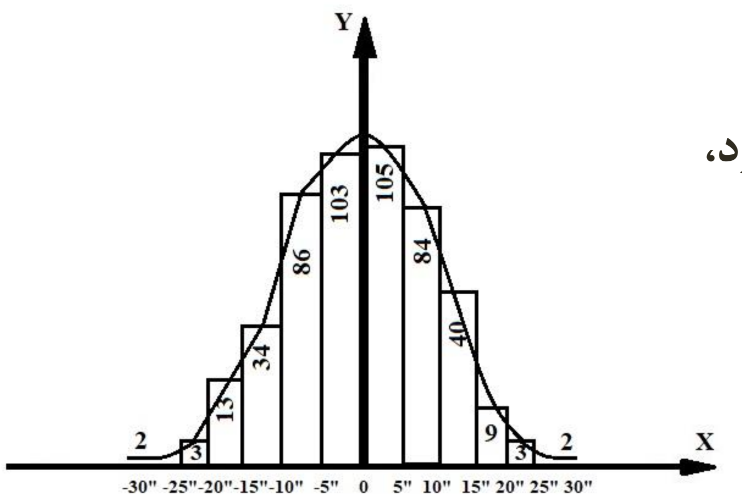
۱) تعداد خطاهای مثبت = تعداد خطاهای منفی در نتیجه منحنی گوس نسبت به محور y قرینه می باشد و مجموع خطاهای اتفاقی = ۰

۲) منحنی نشان می دهد احتمال وقوع خطاها با مقدار کم، بیشتر از وقوع خطاهایی که با مقدار آنها از نظر قدر مطلق بیشتر می باشد.

۳) مقدار خطا از حد معینی تجاوز نمی کند در نتیجه می توان از روی منحنی اشتباه در اندازه گیری را تشخیص داد.

۴) بزرگی باقیمانده با تعداد باقیمانده نسبت عکس دارد،

بنابراین منحنی نزولی می باشد.

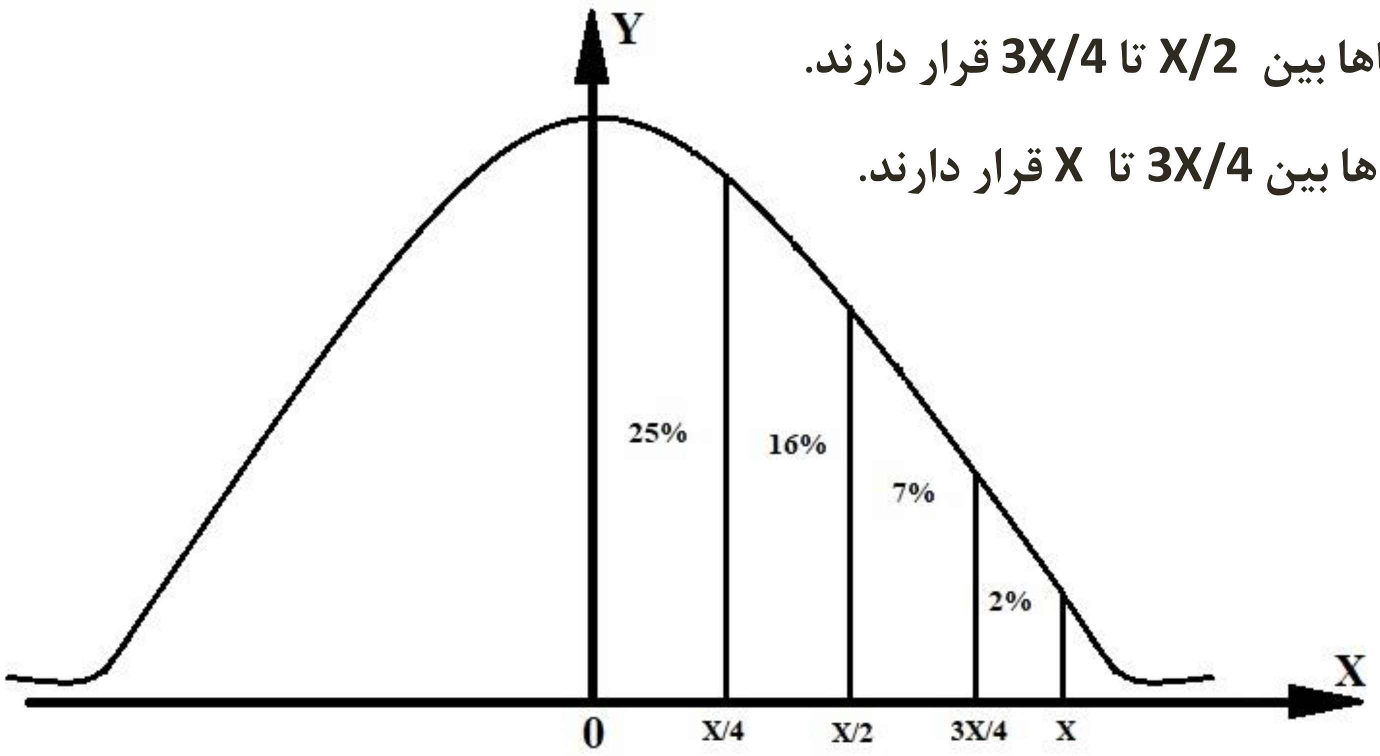


نظریه خطاها

منحنی نمایش خطاهای اتفاقی (منحنی زنگوله ای گوس):

اگر قسمت مثبت منحنی را به چهار قسمت تقسیم نمائیم خواهیم داشت:

- مقدار ۲۵٪ از خطاها بین ۰ تا X/4 قرار دارند.
- مقدار ۱۶٪ از خطاها بین X/4 تا X/2 قرار دارند.
- مقدار ۷٪ از خطاها بین X/2 تا 3X/4 قرار دارند.
- مقدار ۲٪ از خطاها بین 3X/4 تا X قرار دارند.



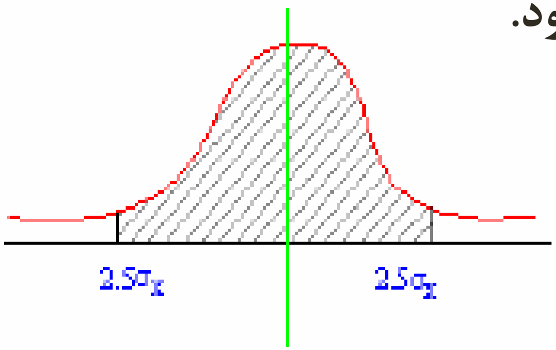
نظریه خطاها

انواع خطاهای اتفاقی :

با توجه به مباحث فوق چند تعریف زیر را خواهیم داشت :

1) خطای احتمالی (Probable Error) : خطایی که احتمال وقوع آن ۵۰٪ باشد.

2) خطای ماکزیمم (Maximum Error) : خطایی است که احتمال وقوع آن ۱٪ باشد. یعنی در هر صد اندازه گیری ممکن است قدر مطلق یکی از خطاها از بقیه خطاها بیشتر باشد و هر یک از اندازه گیری ها که مقدار خطایش از خطای ماکزیمم بیشتر شد، اشتباه محسوب می شود و از فهرست اندازه گیری ها حذف می شود.



$$e_M = 2.5\delta = 2.5\sqrt{\frac{\sum v^2}{n-1}}$$

- ❑ اندازه این خطا ۲.۷ برابر خطای متوسط هندسی است که در محاسبات معمولا ۲.۵ برابر خطای معیار را خطای ماکزیمم در نظر می گیرند.

نظریه خطاها

انواع خطاهای اتفاقی :

با توجه به مباحث فوق چند تعریف زیر را خواهیم داشت :

3) خطای متوسط حسابی (Mean Arithmetic Error) : اگر یک کمیت را در دفعات مختلف اندازه گرفته باشیم، خارج قسمت مجموع قدر مطلق خطاهای اندازه گیری ها را بردفعات اندازه گیری، خطای متوسط حسابی می گویند.

$a-a_1 = e_1$

$a-a_2 = e_2$

....

....

$a-a_n = e_n$

$$e_a = \frac{|e_1|+|e_2|+\ldots+|e_n|}{n} = \frac{\sum|e|}{n}$$

نظریه خطاها

انواع خطاهای اتفاقی :

با توجه به مباحث فوق چند تعریف زیر را خواهیم داشت :

4) خطای متوسط هندسی (Mean Quadratic Error) :

خطای معیار و یا خطای استاندارد (Standard Error) : این خطا در نقشه برداری پایه اندازه گیری خطاهاست و خطاهای ابزار اندازه گیری با این خطا مشخص می شود :

$$e_q = \delta = \pm\sqrt{\frac{e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2}{n}} = \pm\sqrt{\frac{\sum e^2}{n}} = \pm\sqrt{\frac{\sum V^2}{n-1}}$$

نظریه خطاها

روابط خطاها با یکدیگر:

فرض کنید نتایج حاصل از اندازه گیری یک کمیت که با یک وسیله دقیق اندازه گیری شده به ترتیب برابر باشد با:

$$a_1 , \quad a_2 , \quad a_3 , ... , a_n$$

در نتیجه میانگین حسابی برابر است با:

$$\tilde{a} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} = \frac{\sum a_i}{n}$$

اگر مقدار حقیقی کمیت برابر با aباشد،

خطای میانگین	$\alpha = \tilde{a} - a$
خطای ظاهری	$v_i = a_i - \tilde{a}$
خطای واقعی	$e_i = a_i - a$
خطای متوسط حسابی	$v_a = \frac{\sum \lvert v_i \rvert}{n}$
خطای متوسط هندسی	$\delta = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n}}$

نظریه خطاها

روابط خطاها با یکدیگر:

خطای متوسط هندسی را خطای معیار (یا خطای استاندارد) نیز میگویند، این خطا بیانگر معیار دقت اندازه گیریهاست و پایه اندازه گیری خطاها در نقشه برداری است و خطای وسایل اندازه گیری با این خطا مشخص میشود.

با توجه به مطالب فوق و روابط ذکر شده روابط دیگری برای محاسبه خطای معیار و خطای میانگین بشرح زیر نتیجه میشود:

$$\alpha = \frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

خطای متوسط هندسی

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-1}}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum a_i^2 - 1 \Big/ n(\sum a_i)^2}{n-1}}$$

با توجه به اینکه :

$$\bar{a} = \frac{1}{n}\sum a_i$$

می توان نتیجه گرفت :

$$\sum v_i = 0$$

نظریه خطاها

روابط خطاها با یکدیگر:

از طرفی :

$$e_i = a_i - a = (a_i - \bar{a}) + (\bar{a} - a) = v_i + \alpha$$

$$e_i^2 = v_i^2 + \alpha^2 + 2\alpha v_i$$

$$\sum_1^n e_i^2 = \sum_1^n v_i^2 + n\alpha^2 + 2\alpha \sum_1^n v_i$$

در اینصورت :

$$\alpha^2 = \frac{\sum e_i^2 - \sum v_i^2}{n} = \delta^2 - \frac{1}{n}\sum v_i^2$$

و چون داریم :

$$e_i = v_i + \alpha$$

$$\sum e_i = \sum v_i + n\alpha = n\alpha$$

با چشمپوشی از مقادیر کوچک :

$$\sum_1^n e_i^2 = n^2\alpha^2$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{n^2}\sum e_i^2 = \frac{1}{n} * \frac{\sum e_i^2}{n} = \frac{1}{n}\delta^2$$

$$\alpha = \frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

با تساوی طرف های دوم روابطی که α را تعیین می کنند :

$$\delta^2 - \frac{\sum v_i^2}{n} = \frac{1}{n}\delta^2$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-1}}$$

نظریه خطاها

روابط خطاها با یکدیگر:

با استفاده از روابط بالا میتوان نتیجه گرفت که :

- اگر کمیتی به N قسمت مساوی تقسیم شود و توسط یک نفر و یک دستگاه اندازه گیری شود، در نتیجه مقدار خطای هر قسمت با هم برابرخواهد بود و خواهیم داشت:

α : خطای دستگاهی

$$\delta = eq = \pm \alpha \sqrt{N}$$

- اگر کمیتی M مرتبه اندازه گیری شود خطای متوسط هندسی برابر خواهد بود :

$$\delta = eq = \pm \alpha \sqrt{\frac{N}{M}}$$

و همانطور که ملاحظه میشود چنانچه تعداد اندازه گیریها بسیار زیاد شود مقدار خطای میانگین به سمت صفر میل خواهد کرد و در این صورت میانگین اندازه گیریها به مقدار واقعی کمیت نزدیک خواهد شد.

نظریه خطاها

مثال: اگر با یک زاویه یاب بتوان زاویه ای را با خطای ۳۰ ثانیه اندازه گیری کنیم، چنانچه اندازه یک زاویه را از میانگین ۴ بار اندازه گیری با آن بدست آوریم چه خطایی خواهیم داشت؟

$$\delta = \pm\alpha\sqrt{\frac{N}{M}} = \pm 30 * \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm 15''$$

مثال: اگر با یک تئودولیتی که خطای اندازه گیری زاویه آن ۱۰ ثانیه است زاویه ای را با خطای ۵ ثانیه بخواهیم اندازه گیری کنیم چند بار باید عملیات تکرار شود؟

$$\delta = \pm\alpha\sqrt{\frac{N}{M}} \Rightarrow \pm 5 = \pm 10\sqrt{\frac{1}{M}} \Rightarrow M = \frac{100}{25} = 4$$

نظریه خطاها

مثال: مطلوبست محاسبه خطاهای معیار (متوسط هندسی)، ماکزیمم و متوسط حسابی برای طولی که ۱۰ مرتبه اندازه گیری شده و نتایج حاصل از آن بشرح زیر است – ضمنا اندازه هایی که باید از فهرست اندازه گیریها حذف شوند را نیز مشخص کنید؟

L1=251.45 2= 251.46 L3= 251.47 L4= 251.44 L5= 251.44

L6= 251.51 L7= 251.48 L8= 251.44 L9= 251.48 L10=251.49

$$\bar{L} = \frac{\sum L_i}{n} = 251.466$$

$$v_1 = -0.016 \quad v_2 = -0.006 \quad v_3 = +0.004$$

$$v_4 = -0.026 \quad v_5 = -0.026 \quad v_6 = +0.044$$

$$v_7 = +0.014 \quad v_8 = -0.026 \quad v_9 = +0.014$$

$$v_{10} = +0.024$$

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-1}}}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{0.00524}{9}} = 0.024$$

$$e_M = 2.5\delta = 2.5 * 0.024 = 0.060$$

$$\boxed{e_M = 2.5\delta = 2.5\sqrt{\frac{\sum v^2}{n-1}}}$$

$$e_a = \frac{\sum |v_i|}{10} = \frac{0.2}{10} = 0.02$$

$$\boxed{v_a = \frac{\sum |v_i|}{n}}$$

نظریه خطاها

مثال: مسافتی برابر ۵۰۰۰ متر را با یک نوار فلزی ۵۰ متری که خطای متوسط هر دهنه آن برابر ۵± میلیمتر است میخواهیم اندازه گیری کنیم.

برای دستیابی به دقت 1/50000 این مسافت را چند بار باید اندازه گیری کنیم؟

$$\frac{1}{50000} = \frac{e_M}{5000 * 1000} \Rightarrow e_M = 100mm$$

$$\delta = \frac{e_M}{2.5} = \frac{100}{2.5} = 40mm$$

$$N = 5000/50 = 100$$

$$\delta = \pm\alpha\sqrt{\frac{N}{M}} = \pm 5 * \sqrt{\frac{100}{M}} \Rightarrow M = 2$$

نظریه خطاها

میانگین وزن دار اندازه گیری ها:

اگر اندازه یک کمیت از روشهای و یا با وسایل مختلفی بدست آمده باشد به نحوی که هریک از روشها و یا وسایل دارای دقتهای متفاوتی در اندازه گیری باشند، میانگین کل اندازه گیریها از رابطه مربوط به اندازه گیریهای وزن دار حاصل میشود که صورت کلی آن :

$$\bar{a} = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \ldots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$$

در این رابطه a میانگین اندازه هایی است که در هرکدام با روش و یا بوسیله جداگانه ای بدست آمده است و ضرایب p متناسب با مربع معکوس خطای معیار هرکدام از اندازه گیریها انتخاب میشود.

نظریه خطاها

میانگین وزن دار اندازه گیری ها:

مثال: طول یک خط توسط دو گروه اندازه گیری شد. نتایج حاصل به شرح زیر است:

میانگین گروه اول 149.78 متر و خطای معیار آن 0.037 متر

میانگین گروه دوم 149.77 متر و خطای معیار آن 0.047 متر

نزدیکترین مقدار طول این خط را بدست آورید؟

$$p_1 = \frac{1}{\delta_1^2} = \frac{1}{0.037^2} \cong 730$$

$$p_2 = \frac{1}{\delta_2^2} = \frac{1}{0.047^2} \cong 453$$

$$\bar{a} = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2}{p_1 + p_2} = \frac{730 * 149.78 + 453 * 149.77}{730 + 453} = 149.776$$

نظریه خطاها

محاسبه خطای معیار در اندازه گیریهای غیر مستقیم:

فرض میکنیم کمیتی مثل A از طریق اندازه گیری از چند کمیت دیگر که مقادیرشان x و y و z است با رابطه ای بصورت زیر بدست آمده باشد.

$$A = F(x, y, z)$$

با یک سری محاسبات ریاضی و در صورتیکه

$$\delta_z, \delta_y, \delta_x$$

بترتیب خطای معیار کمیتهای x و y و z باشند داریم:

$$\delta_A = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial F}{\partial x} * \delta_x\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} * \delta_y\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} * \delta_z\right)^2\right)}$$

حالتهای خاص:

خطای مجموع:

$$s = x + y + z$$

$$\delta_s = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2}$$

خطای تفاضل :

$$d = x - y$$

$$\delta_s = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2}$$

نظریه خطاها

خطای حاصلضرب :

$$q = x * y * z$$

$$\delta_q = \sqrt{(y*z*\delta_x)^2 + (x*z*\delta_y)^2 + (x*y*\delta_z)^2} = q*\sqrt{(\frac{\delta_x}{x})^2 + (\frac{\delta_y}{y})^2 + (\frac{\delta_z}{z})^2}$$

خطای خارج قسمت :

$$p = x / y$$

$$\delta_p = p*\sqrt{(\frac{\delta_x}{x})^2 + (\frac{\delta_y}{y})^2}$$

مثال: مطلوبست محاسبه خطای اندازه گیری یک مسافت ۴۵۰ متری که با یک نوار فلزی ۵۰ متری اندازه گیری شده است در صورتی که خطای متوسط هر دهانه ۲ میلیمتر باشد؟

$$s = x + y + z$$

$$\delta_s = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2} \xrightarrow{\delta_x = \delta_y = \delta_z = \delta} \delta_s = \delta\sqrt{n}$$

$$450 / 50 = 9$$

$$\delta = 2*\sqrt{9} = 6mm$$

نظریه خطاها

مثال: مطلوبست تعیین خطای مساحت مستطیلی که طول و عرض آن به ترتیب ۱۲۰ متر و ۸۰ متر وخطای معیار آنها بترتیب ۳ و ۱ سانتیمتر است؟

$$A = x.y$$

$$\delta_A = \sqrt{(y*\delta_x)^2 + (x*\delta_y)^2} = A*\sqrt{(\frac{\delta_x}{x})^2 + (\frac{\delta_y}{y})^2}$$

$$\delta_A = 9600*\sqrt{(\frac{0.03}{120})^2 + (\frac{0.01}{80})^2} = 2.68m^2$$

مثال: فاصله افقی و اختلاف ارتفاع بین دو نقطه A و B به ترتیب ۱۵۰ و ۱۲ متر است هرگاه خطای معیار فاصله افقی ۲۰ سانتیمتر و خطای معیار اختلاف ارتفاع ۵ سانتیمتر باشد خطای شیب AB چقدر است ؟

$$p = y/x = 12/150 = 0.08 = 8\%$$

$$\delta_p = p*\sqrt{(\frac{\delta_x}{x})^2 + (\frac{\delta_y}{y})^2} = 0.08*\sqrt{(\frac{0.2}{150})^2 + (\frac{0.05}{12})^2} = 0.000351 \cong 0.03\%$$

پایان

خسته نباشید